

OLIMPIADE SAINS TERAPAN NASIONAL SEKOLAH MENENGAH KEJURUAN 2008

MATEMATIKA NON-TEKNOLOGI

SESI 3 (ISIAN SINGKAT DAN ESSAY)

WAKTU : 240 MENIT

I. Soal Isian Singkat, ada 10 soal dalam test ini.

Petunjuk Menjawab Soal.

- Tulis jawaban akhir (Hasil saja pada lembar jawaban).
- Jika anda akan mengganti jawaban, maka coret saja pada jawaban yang salah.
- Setiap soal yang dijawab benar diberi nilai + 5, bila jawaban salah diberi nilai -2, dan bila kosong (tidak dijawab) bernilai 0.

-
- Suatu proyek pengerukan pendangkalan sungai dapat dikerjakan selama p hari dengan biaya setiap harinya $(4p + \frac{1500}{p} - 40)$. (dalam Juta Rupiah). Jika biaya minimum proyek tersebut adalah R juta rupiah maka $R = \dots\dots\dots$

Jawaban $R = 1.400$. (dalam Juta Rupiah)

- Si A mempunyai hutang Rp 100.000; Ia setuju tiap tiga bulan membayar Rp 10.000; ditambah 2,5 % dari sisa hutangnya sebagai bunga. Jumlah total bunga yang dibayarnya setelah hutangnya lunas sebesar : $\dots\dots\dots$

Jawaban :

jumlah total bunga yang dibayarnya membentuk dret hitung :

$$S=2.500+2.250+2.000+\dots+250 = \text{Rp } 13.750;$$

- Jika $23^n = 5$ dan $23^m = 10$, maka dapatkan nilai $2^{\frac{1}{n-m}}$

Jawaban : $\frac{1}{23}$

- Diketahui $3^{2x} + 3^{-2x} = 98$. Tentukan nilai $3^x + 3^{-x}$.

Jawaban : 10

- Pembagi persekutuan terbesar dari 4840 dan 1512 adalah ; $\dots\dots\dots$

Jawab: pembagi persekutuan terbesar adalah 8.

6. Seorang Guru SMK memberikan pelajaran tambahan kepada 3 orang siswa yang kemampuannya dibawah rata-rata. Setelah satu bulan diberi pelajaran, siswa tersebut diberi soal ujian. Lulus (L) dan tidaknya (T) siswa-siswa tersebut dicatat. Ruang sampel S dari persoalan ini adalah :

Jawab: Ruang sampel S = $LLL, LLT, LTL, TLL, TTL, TLT, LTT, TTT$.

7. Isilah titik-titik berikut dengan jawaban yang benar. Jika A suatu kejadian di dalam ruang sampel S, dan P(A) adalah probabilitas (Peluang) terjadinya kejadian A, maka :

$$P(A) = \frac{\text{Banyak anggota kejadian A}}{\text{.....}}$$

Jawab : $P(A) = \frac{\text{Banyak anggota kejadian A}}{\text{Banyak anggota kejadian S}}$.

8. Dari 8 lulusan SMK yang mempunyai kemampuan sama dan diatas rata-rata, akan dipilih 3 orang oleh Kepala Dinas Pendidikan untuk mengikuti studi banding tentang pendidikan kejuruan ke-luar negeri. Banyak susunan yang mungkin terbentuk adalah :

.....
Jawab : Banyak susunan = 56

9. SMK Permata hijau dikenal oleh masyarakat karena prestasi olah raganya. Pada SMK tersebut terdapat 5 siswa yang memperoleh juara bola Volly, 3 siswa memperoleh juara Sepakbola dan 2 siswa yang memperoleh juara Catur. Jika akan dipilih 3 siswa yang akan diberi beasiswa, tentukan banyak cara memilih 3 siswa yang terdiri dari 1 orang juara Volly, 1 orang juara Sepakbola dan 1 orang juara Catur, adalah

Jawab : 30

10. Seorang ibu manabung sebesar Rp. 500.000 setiap tanggal 31 mulai dari Januari 1999, dan terus berlanjut sampai Desember 2008. Hanya tahun 2004 selama 12 bulan dia tidak dapat membangun. Jika tingkat bunga yang ditawarkan adalah $j_{12} = 9\%$. Maka jumlah tabungan dari awal tahun 1999 sampai 2007 adalah :

Jawab :

Jumlah tabungan dari awal tahun 1999 sampai 2007 adalah

Rp. 82.741.611.47

II. Soal Essay, ada 10 soal dalam test ini.

Petunjuk Menjawab Soal.

- a. Jawablah setiap nomor soal dalam lembar jawaban yang telah disediakan pada satu lembar jawaban (tidak dicampur dengan nomor soal lain).
 - b. Jawaban setiap soal harus dengan memberi penjelasan selengkapnya, termasuk menyertakan rumus atau dalil yang dipakai.
 - c. Jika ingin mengganti uraian jawaban anda, cukup dicoret saja
 - d. Nilai maksimal untuk setiap soal adalah : 10.
-
-

1. Fungsi permintaan akan sebuah arloji mengikuti kurva linier sedemikian rupa sehingga bila arloji itu dijual dengan harga 5 (dalam ratusan ribu Rupiah) maka terjuallah sejumlah 2 sedangkan pada harga 2 terjual sebanyak 8 arloji. Maka :
 - a). Nyatakan fungsi permintaan : $P=f(q)$
 - b). Hitung harga maksimum dimana konsumen masih mau membayar orliji itu.

Jawaban :

- a). Jika dijual dengan harga 5 maka terjuallah sejumlah 2, dalam geometrinya berarti melalui titik (5,2) dan jika pada harga 2 terjual sebanyak 8 arloji, berarti melalui titik (2,8). Persamaan fungsi permintaan itu dapat dicari sbb:

$$\frac{P-5}{2-5} = \frac{q-2}{8-2} \Rightarrow P-5 = -\frac{1}{2}(q-2) \Rightarrow P = -\frac{1}{2}q + 6$$

- b) Jika $q=0$ (berarti tidak ada sama sekali orloji yang terjual), maka $P=6$.
Jadi Harga tertinggi yang dapat terjadi di pasaran dimana para konsumen masih bersedia membeli harus masih lebih rendah sedikit dari 6 (ingat satuan harga adalah ratusan ribu Rupiah)

2. Di Yogyakarta pernah dipropagandakan peternakan kelinci. Seorang peternak kelinci menghitung pertumbuhan jumlah kelincinya dengan pemisalan bahwa sepasang kelinci menjadi dewasa dalam satu bulan dan tiap bulan berikutnya melahirkan sepasang anak kelinci. Kalau ia mulai beternak dengan satu pasang anak kelinci, maka jumlah pasang kelincinya naik menurut deret Fibonacci (1170-1240). Dapatka suku umum dari deret Fibonacci tersebut.

Jawaban :

Dibuat daftar perkembangan jumlah pasang kelinci dengan tabel berikut :

Awal bulan	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
	1	1	1	1	1 1	1 1 1	1 1 1 2	1 1 1 2 3
			1	1	2	3	5	8
JUMLAH	1	1	2	3	5	8	13	21

Jumlah pasang kelinci yang melahirkan tercantum dalam kurungan persegi
 Jumlah pasang kelinci yang lahir tiap bulan tercantum dalam kurungan lingkaran
 Ternyata jumlah pasang kelinci diberikan oleh deret :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... untuk bulan n: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...

Tampak deret tersebut polanya sebagai berikut :

suku pertama : 1

Suku kedua : 1

Suku ketiga dan seterusnya = jumlah kedua suku yang mendahuluinya.

Jadi deret tersebut dapat ditulis : 1, 1, $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$

3. Misalkan $y = x - 1$, x dan z adalah bilangan bulat positif, tentukan nilai z yang memenuhi sistem persamaan :

$$\binom{x}{y} = 5z, \text{ dan } {}_xP_y = 5z.$$

Jawaban :

Misalkan $y = x - 1$, x dan z adalah bilangan bulat positif, tentukan nilai z yang memenuhi sistem persamaan :

$$\binom{x}{y} = 5z, \text{ dan } {}_xP_y = 5z.$$

Persamaan 1 didapat :

$$\binom{x}{y} = \binom{x}{x-1} = \frac{x!}{(x-1)!1!} = x$$

$$x = 5z$$

Persamaan 2 didapat :

$${}_xP_y = \frac{x!}{[x-(x-1)!]} = x!$$

$$x! = 5z$$

Persamaan (1) dan (2) didapat :

$x! = x$. Nilai x yang memenuhi persamaan ini adalah $x = 0,1,2$.

4. Ibu Tini memiliki 2 buah deposito. Deposito pertama sebesar Rp. 7.200.000 dengan bunga sederhana 9% p.a. Dan deposito kedua sebesar Rp. 7.800.000 mendapatkan bunga sederhana 7,5%. Hitunglah tingkat bunga yang diperoleh Ibu Tini selama 1 tahun atas depositonya sebesar Rp. 15.000.000

Jawab :

- i. Pendapatan bunga atas deposito pertama per tahun adalah :

$$P = \text{Rp. } 7.200.000$$

$$r = 9 \%$$

$$t = 1$$

$$SI_1 = Prt$$

$$= \text{Rp. } 7.200.000 \times 0.09 \times 1$$

$$= \text{Rp. } 648.000$$

- ii. Pendapatan

$$P = \text{Rp. } 7.800.000$$

$$r = 7,5 \%$$

$$t = 1$$

$$SI_1 = Prt$$

$$= \text{Rp. } 7.800.000 \times 0.075 \times 1$$

$$= \text{Rp. } 585.000$$

Total pendapatan bunga atas seluruh deposito per tahun :

$$SI = SI_1 + SI_2$$

$$= \text{Rp. } 648.000 + \text{Rp. } 585.000$$

$$= \text{Rp. } 1.233.000$$

∴ Tingkat bunga rata-rata atas kedua deposito tersebut adalah :

$$r = \frac{\text{Total bunga}}{\text{Total deposito}}$$

$$= \frac{\text{Rp. } 1.233.000}{\text{Rp. } 7.200.000 + \text{Rp. } 7.800.000}$$

$$= 0,0822$$

$$= 8,22\%$$

5. Berapa lama waktu yang diperlukan untuk membuat uang sebesar Rp. 5.000.000 menjadi Rp. 8.500.000 dengan $j_{12} = 12\%$

Jawab :

$$\text{Rumus : } n = \frac{\log \frac{S}{P}}{\log (1+i)}$$

Diketahui :

$$P = \text{Rp. } 5.000.000$$

$$S = \text{Rp. } 8.500.000$$

$$i = \frac{20\%}{12}$$

$$= 1\%$$

$$\therefore n = \frac{\log \frac{\text{Rp. } 8.500.000}{\text{Rp. } 5.000.000}}{\log (1+0,01)}$$

$$= \frac{\log 1,7}{\log 1,01}$$

$$= 53,3277 \text{ bulan}$$

$$= 4 \text{ tahun } 5 \text{ bulan } 10 \text{ hari } \approx 4 \text{ tahun } 6 \text{ bulan}$$

6. Sebuah bioskop telah menetapkan harga karcis Rp 50.000; per orang dan menjual 400 karcis pada suatu malam hari biasa. Setelah mengadakan survey dengan pelanggannya, bioskop menaksir bahwa untuk setiap Rp 5000 harga yang mereka turunkan, banyaknya pengunjung akan meningkat sebanyak 25 orang per malam.
- Tentukan fungsi permintaan.
 - Jika surplus konsumen menyatakan jumlah uang yang dihemat oleh konsumen ketika mengeluarkan uang untuk keperluannya pada harga y yang berkaitan dengan jumlah x yang diminta, dengan kata lain menyatakan luas diantara kurva permintaan dan garis harga $= y$. Hitung surplus konsumen pada saat karcis dijual dengan harga Rp 30.000;

Jawaban :

Hasil survey setiap penurunan harga sebesar Rp 5000 menaikkan pengunjung sebanyak 25 orang. Jadi gradien fungsi permintaan adalah

$$m = - (5000) / (25) = -200$$

Persamaan garis yang melalui (400; 50.000) adalah :

$$y - 50.000 = (-200) (x - 400)$$

$$y = -200 x + 80.000 + 50.000$$

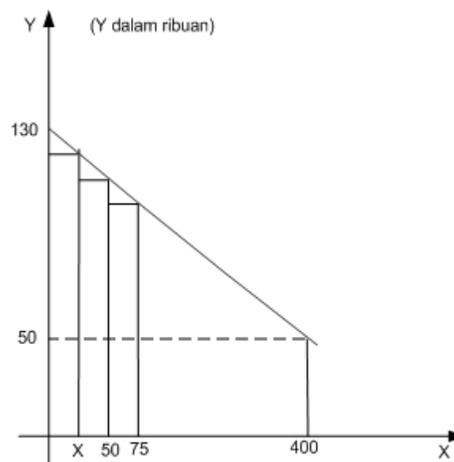
Jadi fungsi permintaan : $y = -200 x + 130.000$

Pada $x = 0$ maka nilai $y = 130.000$

Pada $y = 30.000$ maka $x = 500$.

Jika surplus konsumen (S), maka S sebesar :

$$S = (1/2) (500) (130.000 - 30.000) \\ = 25.000.000.$$



7. Misalkan pada sebuah SMK terdapat 10 orang siswa yang dipercaya oleh para Guru untuk mewakili sekolah mengikuti Olimpiade di ITS. Diantara 10 siswa tersebut terdapat 7 siswa laki-laki. Para guru menganggap kemampuan akademik mereka semua adalah sama. Karena alasan penghematan akomodasi pihak sekolah hanya akan memilih 6 siswa diantaranya untuk mewakili sekolah. Tentukan :
- Banyak susunan berbeda yang mungkin dibentuk oleh para Guru, tanpa membedakan siswa laki-laki dan siswa perempuan.
 - Banyak susunan berbeda yang dapat dibentuk dimana terdapat 4 siswa laki-laki dan 2 siswa perempuan.
 - Banyak susunan berbeda yang dapat dibentuk dimana semua yang dikirim adalah siswa laki-laki.
 - Apabila x menyatakan banyak siswa laki-laki yang mewakili sekolah, tentukan banyak susunan yang berbeda yang mungkin terbentuk.

Jawaban :

$$a. \binom{10}{6} = \frac{10!}{6!.4!} = \frac{(10)(9)(8)(7)}{(4)(3)(2)(1)} = 210.$$

$$b. \binom{7}{4} \binom{3}{2} = \frac{7!}{4!.3!} \cdot \frac{3!}{2!.1!} = \frac{(7)(6)(5)}{(3)(2)} \cdot \frac{3}{1} = 105.$$

$$c. \binom{7}{6} \binom{3}{0} = \frac{7!}{6!.1!} \cdot \frac{3!}{0!.3!} = (7).(1) = 7.$$

$$d. \binom{7}{x} \binom{3}{6-x}.$$

8. Seorang karyawan menyimpan uangnya sebesar Rp. 5.000.000 di sebuah bank, dengan memberikan bunga sebesar 12,25% diperhitungkan dan dikreditkan harian.

Berapa besarnya bunga dihasilkan setelah / selama :

- Tahun Pertama
- Tahun ke - 2

Jawab :

$$\text{Rumus: } I = S - P = P \left(1 + i \right)^n - P$$

Dimana :

I = Besar bunga

S = Nilai Akhir

P = Nilai Pokok Awal

n = Jumlah periode perhitungan bunga

n = Tingkat bunga periode perhitungan bunga = $\frac{jm}{m}$

jm = tingkat bunga nominal tahunan dengan periode perhitungan
m kali per tahun

a. diketahui :

$$P = \text{Rp. } 5.000.000$$

$$i = 0,1225 / 365$$

$$n = 365$$

$$\therefore I = P \left(1 + i \right)^n - P$$

$$= \text{Rp. } 5.000.000 \left[1 + \left(\frac{0,1225}{365} \right) \right]^{365} - \text{Rp. } 5.000.000 = \text{Rp. } 651.479,37$$

b. P = Rp. 5.651.479,37

$$i = 0,1225 / 365$$

$$n = 365$$

$$\therefore I = P \left(1 + i \right)^n - P$$

$$= \text{Rp. } 5.651.479,37 \left[1 + \left(\frac{0,1225}{365} \right) \right]^{365} - \text{Rp. } 5.651.479,37$$

$$= \text{Rp. } 736.364,45$$

9. Seorang pengusaha ingin memproduksi dua barang X dan Y dalam jumlah x dan y . Tiap barang memerlukan bahan, buruh dan alat tercantum pada daftar berikut, yang mana juga tercantum jumlah barang yang tersedia. Kalau laba atas barang X = 3, dan Y = 4, maka hitungkan x dan y agar labanya maksimum.

	x	y	Tersedia
Bahan	4	3	180
Alat	1	1	50
Buruh	1	2	80

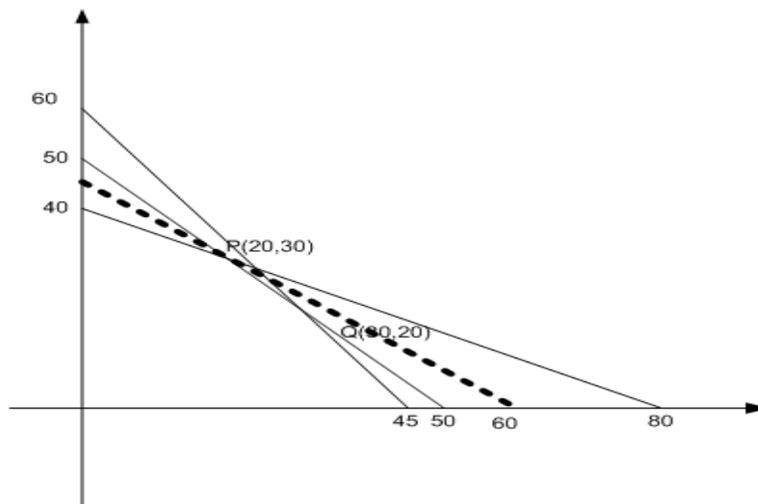
Jawaban :

Maksimumkan fungsi obyektif $L = 3x + 4y$

Dengan syarat : $4x + 3y \leq 180$

$$x + y \leq 50$$

$$x + 2y \leq 80 \text{ dan } x \geq 0, y \geq 0$$



Nilai maksimal dari z diperoleh dengan mencari nilai z yang maksimal pada keempat titik pojok daerah penyelesaian dari sistem pertidaksamaan, yaitu :

$(0,0)$; $(45,0)$; $(0,40)$; $P(20,30)$ dan $Q(30,20)$.

Bila garis $c = 3x + 4y$ digeser maka memberikan titik $P(20,30)$ sebagai titik sudut terluar, sehingga laba maksimum terdapat pada produksi $x = 20$ dan $y = 30$, dengan laba : $L = 3(20) + 4(30) = 180$.

10. Bapak Muri seorang karyawan yang telah bekerja selama 30 tahun akan pension. Ia mendapatkan uang pension yang akan dibayar sekaligus (lump-sum) sebesar Rp. 200.000.000. Pak Muri kemudian menyimpannya dalam deposito berjangka 3 bulan yang memberinya bunga 8% p.a. Apabila kepentingan dirinya dan keluarga, ia mengambil sebesar Rp. 6.000.000 setiap bulan. Dalam berapa tahunkah deposito Pak Muri akan habis ?

Jawab :

Diketahui : $PV = \text{Rp. } 200.000.000$

$$i = \frac{8\%}{4}$$

$$A = \text{Rp. } 6.000.000$$

$$\begin{aligned} \therefore n &= -\frac{\log\left(1 - \left(\frac{PV \cdot i}{A}\right)\right)}{\log(1 + i)} \\ &= -\frac{\log\left(1 - \left(\frac{\text{Rp. } 200.000.000 \times 0.02}{\text{Rp. } 6.000.000}\right)\right)}{\log(1 + 0.02)} \\ &= -\frac{\log 0,33333333}{\log 1,02} \\ &= -\frac{0,47712125}{0,00860017} \\ &= 55,478 \text{ periode} \\ &= 13,87 \text{ tahun} \approx 14 \text{ Tahun} \end{aligned}$$